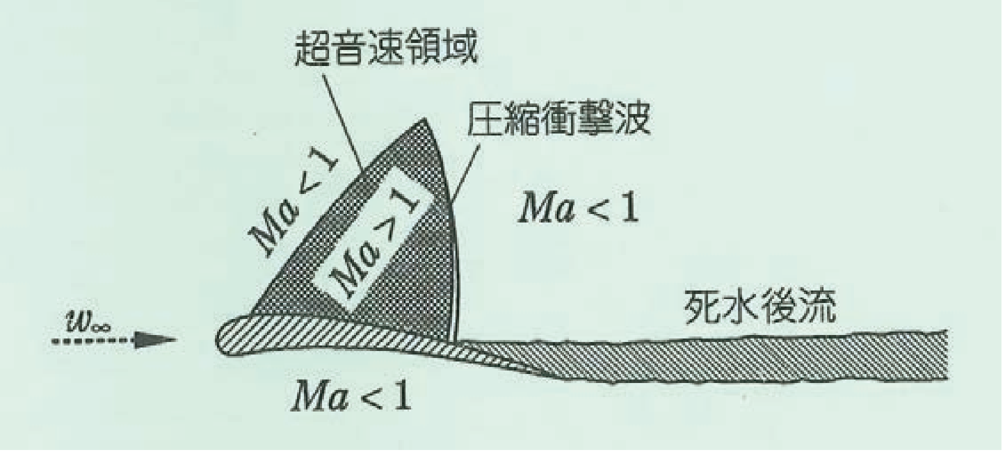
エンジニアのための

流れ学

第 3 巻

圧縮性流れ



中川　武夫（流水）　訳
ヴィリー・ボール　著

コロンブス大学出版局

Kingston・Melbourne・Göttingen・Bangkok・Kanazawa・Kaunas

5　圧縮性流れ

5.1　序　論

導管内または物体まわりの気体および蒸気の流れにおいては、激しい圧力、速度あるいは温度の変化が起こるために、密度および体積の変化がもはや無視できない程となる。このような流れが圧縮性流れに他ならない。

密度変化が非常に小さい場合には密度と容積は一定と見なしうるので、非圧縮性流れの法則を用いて種々の計算がなされることとなる。

高速な圧縮性内部流は導管中、翼列流路または容器開口部における大きな圧力差によって発生し、圧縮性外部流は高速で飛翔する物体の周辺に生ずる。

地球重力の影響は、気体流れおよび蒸気流れの場合にはほとんどの場合これを無視しうる。

5.2　音の伝播

小さな圧力乱れにより発生する圧力波は音速で伝播する。

理想気体および蒸気中の音速は1. 3節において次のように導かれている。

(5. 1)

$$a = \sqrt{p \cdot v \cdot \kappa} = \sqrt{\frac{p \cdot \kappa}{\rho}} = \sqrt{\kappa \cdot R_i \cdot T}$$

a	音速
p	圧力
v	比体積
κ	等エントロピー指数
ρ	密度
R_i	特殊気体定数
T	温度

圧力波を発生する音源が動く時、三つの場合が現われる。

a）音源が音速以下の速度で動く場合

b）音源の速度と音速とが互いに等しい場合

c）音源が音速以上の速度で動く場合

図5.1中に三つの可能な圧力伝播が比較対照して示されている。

速度wと音速aとの比は、オーストリアの物理学者エルンスト・マッハの栄誉に対してマッハ数Maと名付けられている。

(5. 2)

$$Ma = \frac{w}{a}$$

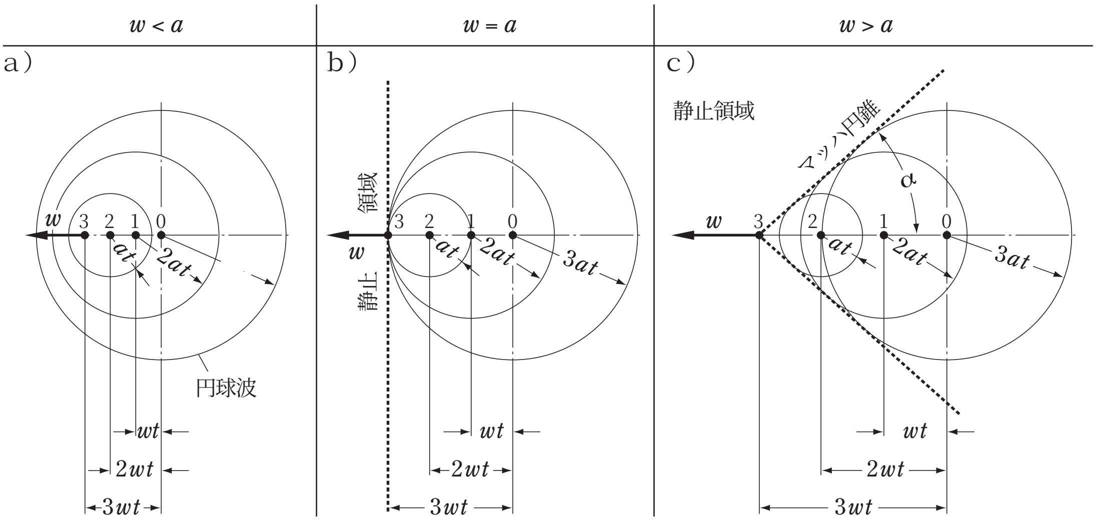


図5.1　音源の速度が異なる場合における圧力波の伝播

マッハ数Maの大きさに従って、次のように速度領域を区別する。

$Ma < 1$　音速以下領域（亜音速）

$Ma \approx 1$　音速近傍または遷移領域（遷音速）

$Ma > 1$　音速以上領域（超音速）

$Ma > 5$　極超音速領域（極超音速）

超音速流の音伝播を観察すれば（図5.1 c）、全ての円球波は円錐内に存在することがわかる。ここで、超音速で動く円錐頂点が音源に他ならない。マッハ円錐と呼ばれる円錐外部には如何なる圧力乱れも存在しない。

円錐母線と運動方向線とが成す角度は、マッハ角と呼ばれている。

$$\sin a = \frac{a \cdot t}{w \cdot t} = \frac{a}{w} = \frac{1}{Ma} \tag{5.3}$$

$$\boxed{\sin a = \frac{1}{Ma}}$$

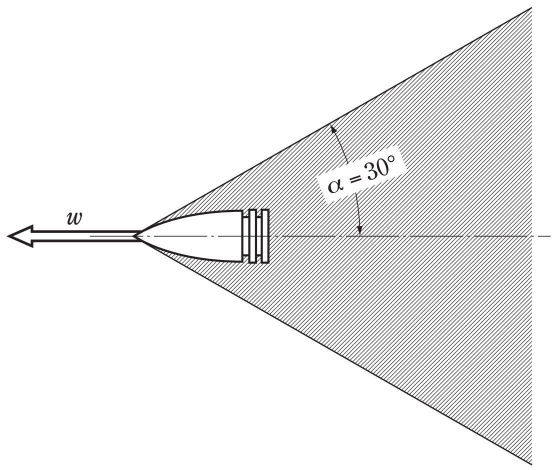


図5.2　例題35

例題35

〔設問〕

弾道学研究において、弾丸背後におけるマッハ角が30°と測定された（図5.2）。

音速$a = 333\,\mathrm{m/s}$の時、弾丸の飛行速度wはどれだけか？

〔解〕

式（5. 3）から、マッハ数は次のように求められる。

$$Ma = \frac{1}{\sin a}$$

$$Ma = \frac{1}{\sin 30°} = \frac{1}{0.5} = 2$$

式（5. 2）から、飛行速度wは次のようになる。

$$w = a \cdot Ma$$

$$w = 333 \cdot 2 = 666\,\mathrm{m/s}$$

$$\boxed{w = 2,400\,\mathrm{km/h}}$$

5. 3　基礎方程式

5. 3. 1　連続方程式

圧縮性流れの連続性は、質量保存則によって表現される。図5.3に描かれた流管の入口断面A_1において質量m_1が流入する。質量m_1は体積$A_1 \cdot l_1$と密度ρ_1によって、次のように表わされる。

$$m_1 = A_1 \cdot l_1 \cdot \rho_1$$

行路長l_1は、速度w_1と時間$\mathrm{d}t$から次のようになる。

$$l_1 = w_1 \cdot \mathrm{d}t$$

$$m_1 = A_1 \cdot w_1 \cdot \mathrm{d}t \cdot \rho_1$$

位置①において時間間隔$\mathrm{d}t$内に流入する質量m_1は、定常流れの場合には位置②において時間間隔$\mathrm{d}t$内に流出する質量m_2と等しくなければならない。

$$m_2 = A_2 \cdot w_2 \cdot \mathrm{d}t \cdot \rho_2$$

$$m_1 = m_2 = m$$

$$A_1 \cdot w_1 \cdot \mathrm{d}t \cdot \rho_1 = A_2 \cdot w_2 \cdot \mathrm{d}t \cdot \rho_2$$

$$A_1 \cdot w_1 \cdot \rho_1 = A_2 \cdot w_2 \cdot \rho_2$$

断面積Aと速度wとの積は体積流率$\dot{V}$であるので、断面積A、速度wおよび密度ρの間の積は質量流率$\dot{m}$となる。

密度ρと速度wとの積は流れ密度と呼ばれている。

それゆえに、連続方程式は次のように表わされる。

（5. 4）

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{m} &= A_1 \cdot w_1 \cdot \rho_1 \\ &= A_2 \cdot w_2 \cdot \rho_2 = A \cdot w \cdot \rho = \text{一定}\end{aligned}}$$

既知の断面変化$A = f(l)$と与えられた初期値w_1とρ_1によって流管の他の任意の場所における支配速度wと密度ρを計算するためには、式(5. 4)のみでは十分ではなく、密度ρの状態変化に関する他の仮定がなされなければならない。

亜音速流れの場合には断面積Aが増すに従って速度wは減少するが、密度ρは増加する(圧縮)。

断面積Aが減るに従って速度wは増加するが、密度ρは減少する(膨張)。

超音速領域における流れの場合には、これらの状況は全く逆になる。断面積Aが減少する場合には流体は圧縮されるが、断面が増す場合には流体は膨張する。

これらの反対の挙動は図5.4中に対照して示されている。

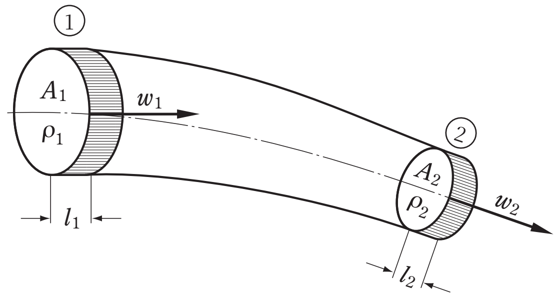


図5.3　連続方程式のために

5. 3. 2　エネルギー方程式

気体流れまたは蒸気流れ中には、次のようなエネルギー形態が現われる。

a）位置エネルギー(ポテンシャルエネルギー)

$m \cdot g \cdot z$

b）圧力エネルギー

$V \cdot p = m \cdot v \cdot p = (m/\rho) \cdot p$

c）運動エネルギー

$m \cdot w^2/2$

d）内部エネルギー

$m \cdot u$

エネルギー方程式を導くに際して、流体とエネルギーは共に増加も減少もしないと仮定される。したがって、流管に沿って総エネルギーは一定に保たれなければならない。

$$m \cdot g \cdot z + \frac{m}{\rho} \cdot p + m \cdot \frac{w^2}{2} + m \cdot u = \text{一定} \tag{5. 5}$$

$$\boxed{g \cdot z + \frac{p}{\rho} + \frac{w^2}{2} + u = \text{一定}}$$

ほとんどの気体流れおよび蒸気流れの場合に、ポテンシャルエネルギー$m \cdot g \cdot z$は無視しうる。

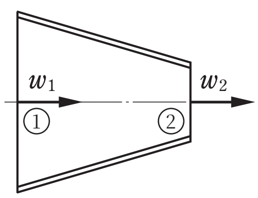
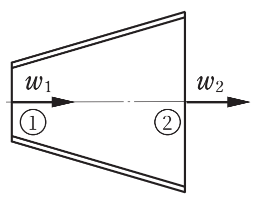
管　形　状	亜音速領域	超音速領域
	膨張(ノズル) $w_2 > w_1$ $p_{2\,\mathrm{st}} < p_{1\,\mathrm{st}}$ $T_2 < T_1$ $\rho_2 < \rho_1$	圧縮(ディフューザー) $w_2 < w_1$ $p_{2\,\mathrm{st}} > p_{1\,\mathrm{st}}$ $T_2 > T_1$ $\rho_2 > \rho_1$
	圧縮(ディフューザー) $w_2 < w_1$ $p_{2\,\mathrm{st}} > p_{1\,\mathrm{st}}$ $T_2 > T_1$ $\rho_2 > \rho_1$	膨張(ノズル) $w_2 > w_1$ $p_{2\,\mathrm{st}} < p_{1\,\mathrm{st}}$ $T_2 < T_1$ $\rho_2 < \rho_1$

図5.4　亜音速と超音速領域におけるノズルとディフューザーの種々の挙動

続きは

完成版で

お楽しみ下さい。