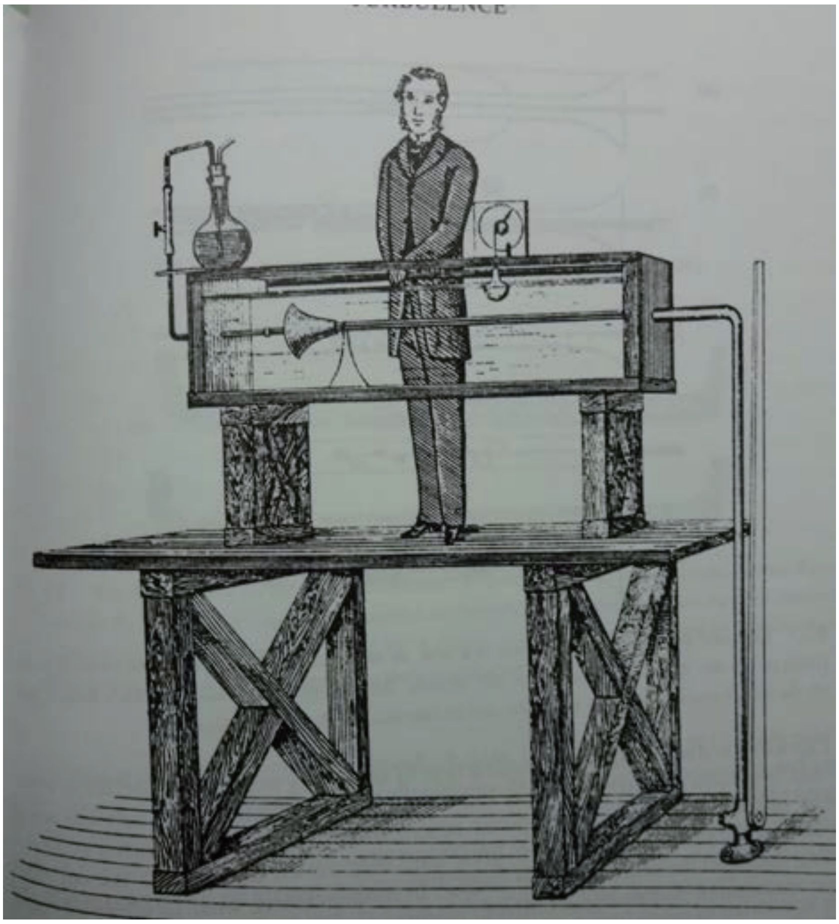
エンジニアのための流れ学

下巻

ヴィーリー・ボール　著　中川　武夫　訳



2021

白山アカデミー出版局

5　圧縮性流れ

5. 1　序　論

導管内または物体まわりの気体および蒸気の流れにおいては、激しい圧力、速度あるいは温度の変化が起こるために、密度および体積の変化がもはや無視できない程となる。このような流れが圧縮性流れに他ならない。

密度変化が非常に小さい場合には密度と容積は一定と見なしうるので、非圧縮性流れの法則を用いて種々の計算がなされることとなる。

高速な圧縮性内部流は導管中、翼列流路または容器開口部における大きな圧力差によって発生し、圧縮性外部流は高速で飛翔する物体の周辺に生ずる。

地球重力の影響は、気体流れおよび蒸気流れの場合にはほとんどの場合これを無視しうる。

5. 2　音の伝播

小さな圧力乱れにより発生する圧力波は音速で伝播する。

理想気体および蒸気中の音速は1. 3節において次のように導かれている。

$$a = \sqrt{p \cdot v \cdot \kappa} = \sqrt{\frac{p \cdot \kappa}{\rho}} = \sqrt{\kappa \cdot R_{\mathrm{i}} \cdot T} \tag{5.1}$$

a　音速
p　圧力
v　比体積
κ　等エントロピー指数
ρ　密度
R_{i}　特殊気体定数
T　温度

圧力波を発生する音源が動く時、三つの場合が現われる。

ａ）音源が音速以下の速度で動く場合
ｂ）音源の速度と音速とが互いに等しい場合
ｃ）音源が音速以上の速度で動く場合

図5.1中に三つの可能な圧力伝播が比較対照して示されている。

速度wと音速aとの比は、オーストリアの物理学者エルンスト・マッハの栄誉に対してマッハ数Maと名付けられている。

$$Ma = \frac{w}{a} \tag{5.2}$$

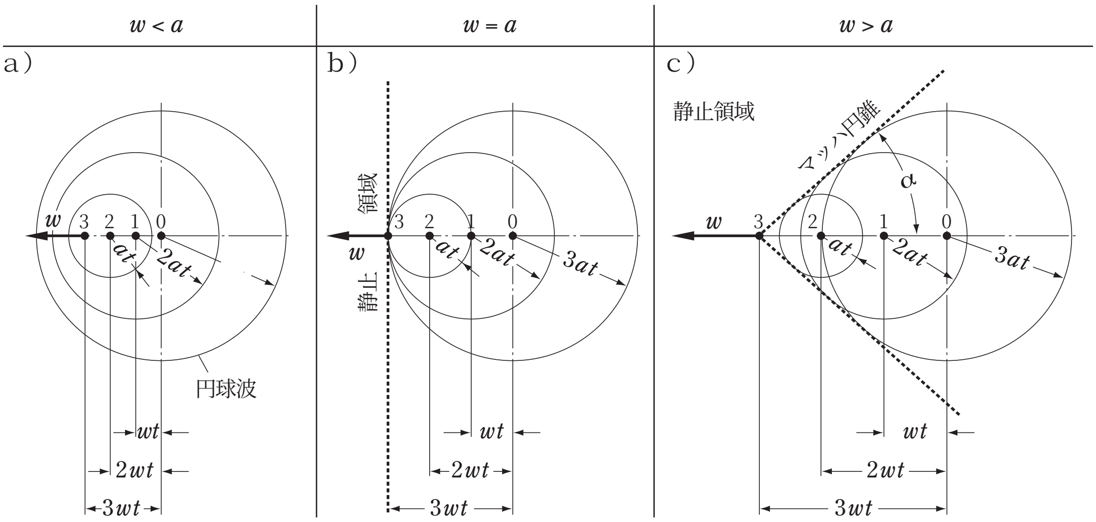


図5.1　音源の速度が異なる場合における圧力波の伝播

マッハ数Maの大きさに従って、次のように速度領域を区別する。

$Ma < 1$　音速以下領域（亜音速）

$Ma \approx 1$　音速近傍または遷移領域（遷音速）

$Ma > 1$　音速以上領域（超音速）

$Ma > 5$　極超音速領域（極超音速）

超音速流の音伝播を観察すれば（図5.1 c）、全ての円球波は円錐内に存在することがわかる。ここで、超音速で動く円錐頂点が音源に他ならない。マッハ円錐と呼ばれる円錐外部には如何なる圧力乱れも存在しない。

円錐母線と運動方向線とが成す角度は、マッハ角と呼ばれている。

$$\sin a = \frac{a \cdot t}{w \cdot t} = \frac{a}{w} = \frac{1}{Ma} \tag{5.3}$$

$$\boxed{\sin a = \frac{1}{Ma}}$$

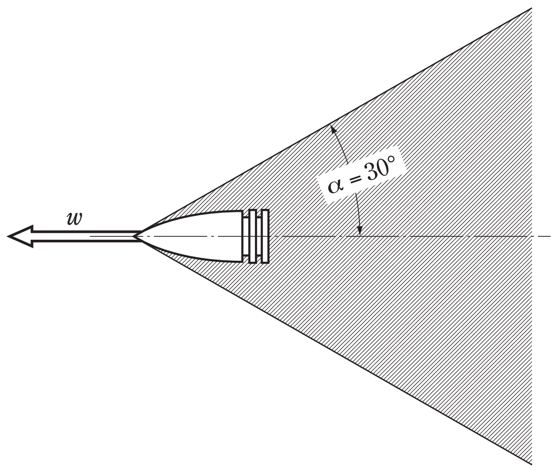


図5.2　例題35

例題35

〔設問〕

弾道学研究において、弾丸背後におけるマッハ角が30°と測定された（図5.2）。

音速$a = 333\,\mathrm{m/s}$の時、弾丸の飛行速度wはどれだけか？

〔解〕

式（5. 3）から、マッハ数は次のように求められる。

$$Ma = \frac{1}{\sin a}$$

$$Ma = \frac{1}{\sin 30°} = \frac{1}{0.5} = 2$$

式（5. 2）から、飛行速度wは次のようになる。

$$w = a \cdot Ma$$

$$w = 333 \cdot 2 = 666\,\mathrm{m/s}$$

$$\boxed{w = 2,400\,\mathrm{km/h}}$$

5. 3　基礎方程式

5. 3. 1　連続方程式

圧縮性流れの連続性は、質量保存則によって表現される。図5.3に描かれた流管の入口断面A_1において質量m_1が流入する。質量m_1は体積$A_1 \cdot l_1$と密度ρ_1によって、次のように表わされる。

$$m_1 = A_1 \cdot l_1 \cdot \rho_1$$

行路長l_1は、速度w_1と時間$\mathrm{d}t$から次のようになる。

$$l_1 = w_1 \cdot \mathrm{d}t$$

$$m_1 = A_1 \cdot w_1 \cdot \mathrm{d}t \cdot \rho_1$$

位置①において時間間隔$\mathrm{d}t$内に流入する質量m_1は、定常流れの場合には位置②において時間間隔$\mathrm{d}t$内に流出する質量m_2と等しくなければならない。

$$m_2 = A_2 \cdot w_2 \cdot \mathrm{d}t \cdot \rho_2$$

$$m_1 = m_2 = m$$

$$A_1 \cdot w_1 \cdot \mathrm{d}t \cdot \rho_1 = A_2 \cdot w_2 \cdot \mathrm{d}t \cdot \rho_2$$

$$A_1 \cdot w_1 \cdot \rho_1 = A_2 \cdot w_2 \cdot \rho_2$$

断面積Aと速度wとの積は体積流率$\dot{V}$であるので、断面積A、速度wおよび密度ρの間の積は質量流率$\dot{m}$となる。

密度ρと速度wとの積は流れ密度と呼ばれている。

それゆえに、連続方程式は次のように表わされる。

（5. 4）

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{m} &= A_1 \cdot w_1 \cdot \rho_1 \\ &= A_2 \cdot w_2 \cdot \rho_2 = A \cdot w \cdot \rho = \text{一定}\end{aligned}}$$

既知の断面変化$A = f(l)$と与えられた初期値w_1とρ_1によって流管の他の任意の場所における支配速度wと密度ρを計算するためには、式(5. 4)のみでは十分ではなく、密度ρの状態変化に関する他の仮定がなされなければならない。

亜音速流れの場合には断面積Aが増すに従って速度wは減少するが、密度ρは増加する(圧縮)。

断面積Aが減るに従って速度wは増加するが、密度ρは減少する(膨張)。

超音速領域における流れの場合には、これらの状況は全く逆になる。断面積Aが減少する場合には流体は圧縮されるが、断面が増す場合には流体は膨張する。

これらの反対の挙動は図5.4中に対照して示されている。

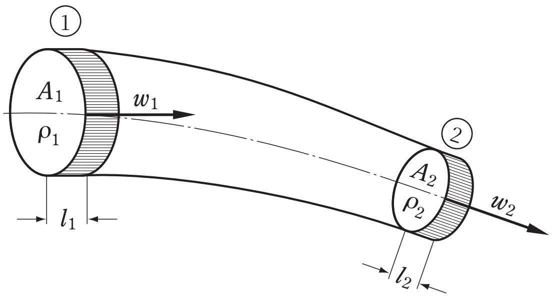


図5.3　連続方程式のために

5. 3. 2　エネルギー方程式

気体流れまたは蒸気流れ中には、次のようなエネルギー形態が現われる。

a）位置エネルギー(ポテンシャルエネルギー)

$m \cdot g \cdot z$

b）圧力エネルギー

$V \cdot p = m \cdot v \cdot p = (m/\rho) \cdot p$

c）運動エネルギー

$m \cdot w^2/2$

d）内部エネルギー

$m \cdot u$

エネルギー方程式を導くに際して、流体とエネルギーは共に増加も減少もしないと仮定される。したがって、流管に沿って総エネルギーは一定に保たれなければならない。

$$m \cdot g \cdot z + \frac{m}{\rho} \cdot p + m \cdot \frac{w^2}{2} + m \cdot u = \text{一定} \tag{5.5}$$

$$\boxed{g \cdot z + \frac{p}{\rho} + \frac{w^2}{2} + u = \text{一定}}$$

ほとんどの気体流れおよび蒸気流れの場合に、ポテンシャルエネルギー$m \cdot g \cdot z$は無視しうる。

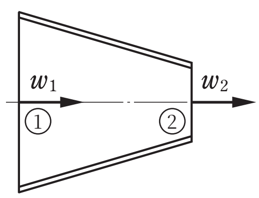
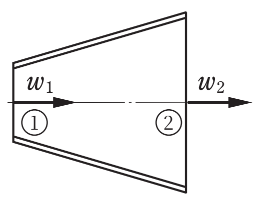
管　形　状	亜音速領域	超音速領域
	膨張(ノズル) $w_2 > w_1$ $p_{2\,st} < p_{1\,st}$ $T_2 < T_1$ $\rho_2 < \rho_1$	圧縮(ディフューザー) $w_2 < w_1$ $p_{2\,st} > p_{1\,st}$ $T_2 > T_1$ $\rho_2 > \rho_1$
	圧縮(ディフューザー) $w_2 < w_1$ $p_{2\,st} > p_{1\,st}$ $T_2 > T_1$ $\rho_2 > \rho_1$	膨張(ノズル) $w_2 > w_1$ $p_{2\,st} < p_{1\,st}$ $T_2 < T_1$ $\rho_2 < \rho_1$

図5.4　亜音速と超音速領域におけるノズルとディフューザーの種々の挙動

理想気体と蒸気に対して、p/ρは式(1. 30)より次のように表現される。

$$\frac{p}{\rho} = p \cdot v = R_i \cdot T \quad \text{(一般気体方程式)}$$

式(1. 31)より、特殊気体定数R_iを次のように置くことができる。

$$R_i = c_p - c_v$$

したがって、p/ρは次のように表わされる。

$$\frac{p}{\rho} = (c_p - c_v) \cdot T$$

内部エネルギーuは次のように定義されている。

$$u = c_v \cdot T$$

これらの表現を式(5. 5)に代入すると、次のような新しいエネルギー方程式を求めることができる。

$$(c_p - c_v) \cdot T + \frac{w^2}{2} + c_v \cdot T = \text{一定}$$

$$c_p \cdot T + \frac{w^2}{2} = \text{一定}$$

c_pとTとの積は比エンタルピーhと名付けられている。

$$\boxed{h + \frac{w^2}{2} = \text{一定}} \tag{5. 6}$$

したがって、式(5. 6)の書き方で表わされたエネルギー方程式は、流れに対していかなるエネルギー付加も除去もされない場合には、流管に沿って比エンタルピー方程式(5. 5)と(5. 6)は非粘性流れのみならず粘性流れに対しても成立することとなる。

エネルギー方程式は何よりも先ず最初に、円管流(5. 5節)および外部流過程(5. 6節)に対し応用される。

5. 3. 3　運動量定理

4. 2. 4項において非圧縮性流れに対して導かれた運動量定理は、圧縮性流れに対してもまた成立する。

輪郭を描かれた流れ領域に対して、加えられる外力(通常の場合には圧力)と運動量力とは互いに平衡を保つこととなる。

5. 4　衝撃波と膨張波

5. 4. 1　序　論

5. 2節においては、圧縮性流体中における小さな圧力変動の伝播が取り扱われた。大きな圧力乱れは音速以上の速度で伝播する。このような超音速で伝播する圧力波は、超音速物体の外部流とデトネーションの場合に、導管内およびノズル内において発生する。

流れ空間の形状に応じて、超音速圧力波の伝播時において衝撃波または膨張波が発生する。

衝撃波と膨張波の計算と記述のために必要な法則と公式の理論的導出は、これに伴う熱力学的かつ数学的取り扱いの複雑さを考慮して断念した。

衝撃波は速度、圧力、温度、密度およびエンタルピーの大きくかつ急激な変化を引き起こす。この急激な状態変化は大きな消耗を伴いつつ、極めて薄い衝撃波面(オーダー1/1,000 mm)内において起こる。

5. 4. 2　衝撃波

流れ方向に対する乱れ面の位置に応じて、表5.1に対照的に示されているように垂直衝撃波と斜め衝撃波に区別される。

表5.1　衝　撃　波

垂　直　衝　撃　波

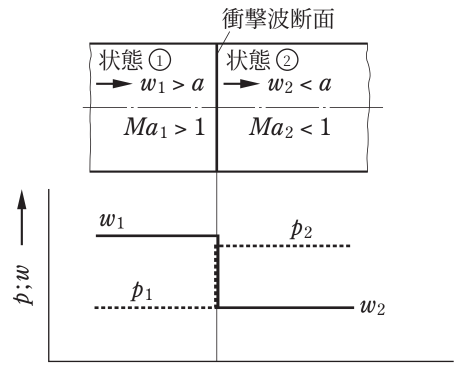


図5.5　垂直衝撃波

流れの方向は真直ぐのままである。超音速流れ①は亜音速流れ②に変換される。

衝撃波前後の圧力間に次の関係が成立する。

$$\frac{p_{2\,\mathrm{stat}}}{p_{1\,\mathrm{stat}}} = 1 + \frac{2 \cdot \kappa}{\kappa + 1}(Ma_1^2 - 1)$$

速度の間には次の関係が成立する。

$$\frac{w_2}{w_1} = 1 - \frac{2 \cdot \kappa}{\kappa + 1}\left(1 - \frac{1}{Ma_1^2}\right)$$

粘性作用により、衝撃波背後の総圧$p_{2\,\mathrm{ges}}$は衝撃波前方の総圧$p_{1\,\mathrm{ges}}$より小さくなる（図5.6）。

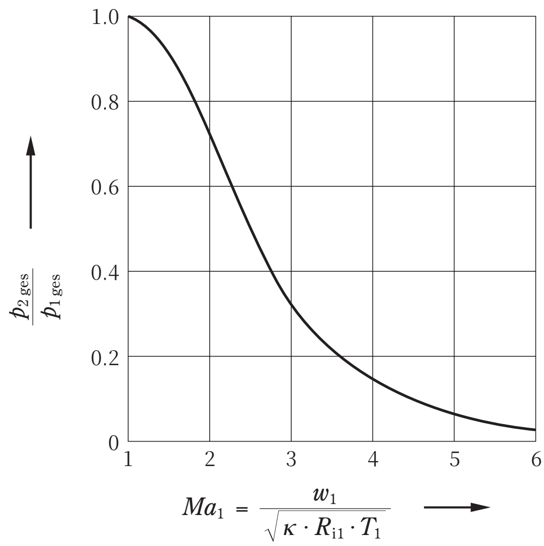


図5.6　垂直衝撃波による階段状圧縮の場合における総圧力損失

その他の主要文献として［5.1］から［5.4］までを参照されたい。

斜　め　衝　撃　波

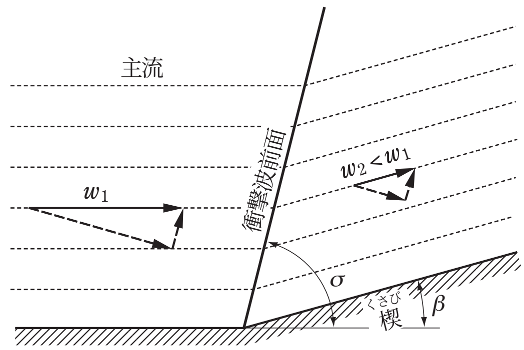


図5.7　内向きに屈曲した角部における斜め衝撃波

斜め衝撃波の衝撃波面は、流れ方向に対して傾斜している。衝撃波面と流向との成す角度が衝撃波角σに他ならない。

衝撃波角σはマッハ数Ma_1に関連するマッハ角α_1より大きい。

圧力上昇は次の関係から求められる。

$$\frac{p_{2\,\mathrm{stat}}}{p_{1\,\mathrm{stat}}} = 1 + \frac{2 \cdot \kappa}{\kappa + 1}(Ma_1^2 \cdot \sin^2 \sigma - 1)$$

ここで、衝撃波角σと楔角βとの間に図5.8に描かれた関係が存在する。

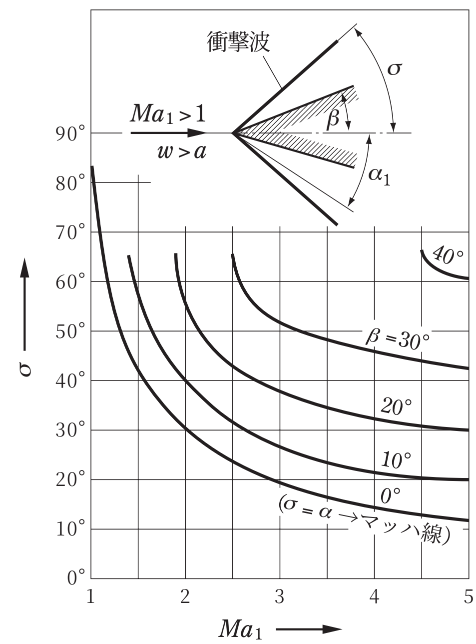


図5.8　斜め衝撃波の場合における角度関係

5. 4. 3　膨張波

屈曲壁（図5.9）上を超音速で流体が流れると、膨張流れが生ずる。偏角βが大きくなければ、流れは転向後はく離しない。

圧力p_1から圧力p_2へと減圧、すなわち膨張する結果として、屈曲点Iを基点とする扇形の膨張波が形成される。

非定常に発生する衝撃波とは対照的に、静圧が減少する場合には膨張波は定常に移動していくこととなる。

速度w_2は加速するので、マッハ数もまた増加する。したがって、$Ma_2 > Ma_1$。

このいわゆるプラントル・マイヤー角流れのより詳細については文献［5.1］等を参照されたい。

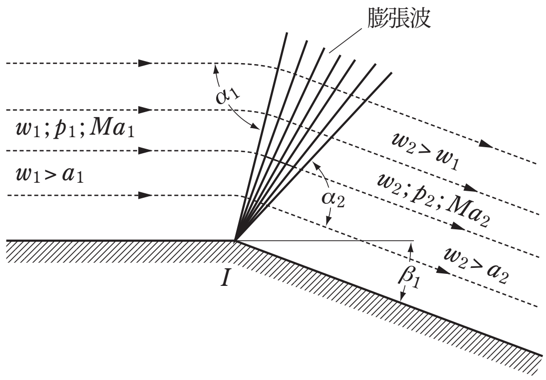


図5.9　外向きに屈曲した壁面角部に形成される膨張波

5. 5　円管流

5. 5. 1　序　論

導管内における空気、ガスおよび蒸気の輸送過程においては、流れ方向への摩擦損失の結果、圧力が減少するので膨張流れとなる。

一般的には、同時に導管に沿って圧力、温度、密度そして速度が変化する。導管内における流体の非圧縮輸送とは異なり、導管に沿う圧力降下は線形ではなく、速度も一定ではない（図5.10）。位置エネルギーの変化は通常の空気、気体および蒸気の場合には、圧力エネルギーと速度エネルギーと比べて無視しうる。

導管に沿って現われる圧力と速度の変化過程は、膨張の仕方と摩擦力に依存する。実際は、2種類の典型的な導管形態、すなわち滑らかな非断熱導管と断熱導管が存在する。以下の比較対照において、2種類の導管について個々の相違点を指摘することとする（表5.2）。

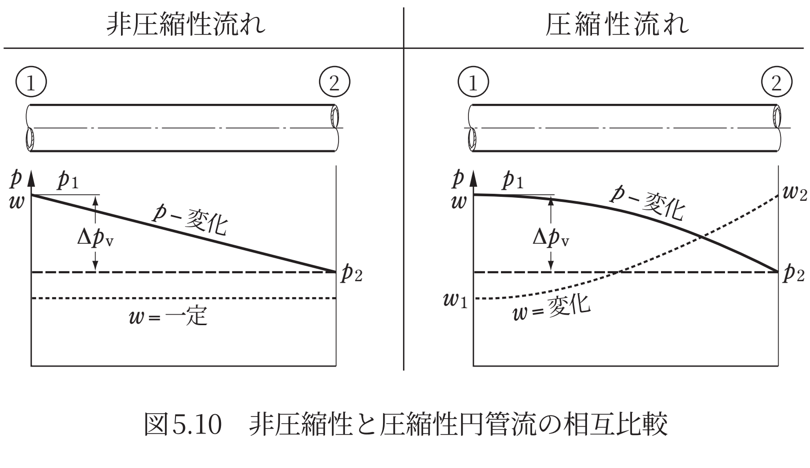
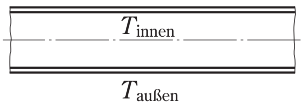
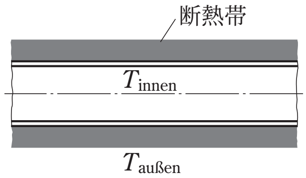


図5.10　非圧縮性と圧縮性円管流の相互比較

表5.2　導　　管

非　断　熱　導　管	断　熱　導　管
 図5.11 a　非断熱導管 円管壁を介して熱交換が起こる。流体温度T_{innen}は徐々に外温$T_{außen}$と等しくなる。 流れは良い近似で、等温と呼ばれている。 例：地下に埋設された長距離ガス管	 図5.11 b　断熱導管 導管を隔離することによって、管壁と隔離層とを介する熱交換はほぼこれを無視することができる。断熱導管は高温または低温であって、その内部温度T_{innen}が外部温度$T_{außen}$とが異なるようなガスまたは蒸気の輸送に応用される。 もし、この熱交換が零であるならば、真の断熱円管流が実現していることとなる。 例：長距離蒸気管

両者の物理学的特性、すなわち断熱と等温は、実際の円管流の場合には必然的になにがしかの量の熱交換が現われるし、また温度は常に一定なわけではないので、これらはいずれも極限の場合に相当している。

以下の項における圧縮性導管中流れの圧力降下に関して導かれる法則や公式は、円管中の定常流れに限定される。

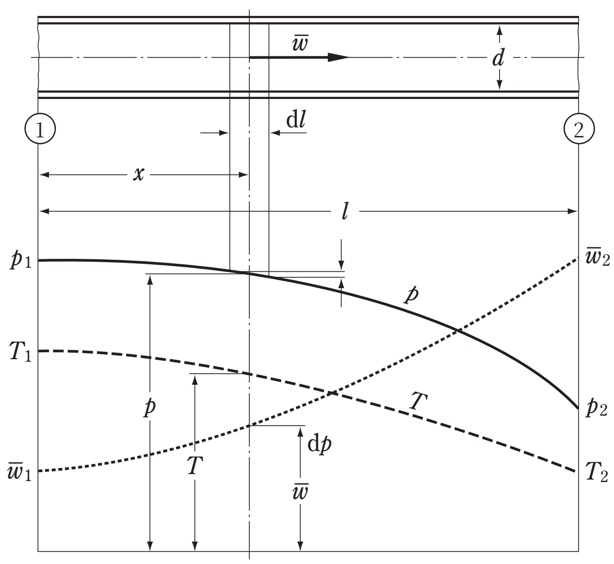


図5.12　圧縮性円管流における圧力、速度および温度変化

5.5.2　任意熱交換を伴う圧力降下方程式

長さ$\mathrm{d}l$の円管要素に対して、粘性に帰因する圧力降下は式(4.56)より次のように置くことができる(図5.12)。

$$\mathrm{d}p = -\lambda \cdot \frac{\mathrm{d}l}{d} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot \bar{w}^2$$

管の長さlの増加に伴って圧力は減少するので、上の評価式の右辺に負号があらかじめ付けられている。

理想気体に関する気体方程式(式(1.7))より、密度ρは圧力pと温度Tを用いて次のように表わされる。

$$\rho = \frac{p}{R_i \cdot T}$$

続きは

完成版で

お楽しみ下さい。